

LOGARITMOS

1 Calcula los logaritmos que se indican:

- a) $\log_2 4, \log_2 8, \log_2 16, \log_2 32, \log_2 64$;
- b) $\log_3 9, \log_3 27, \log_3 81, \log_3 243, \log_3 729$;
- c) $\log_5 25, \log_5 125, \log_5 625, \log_5 3125$;
- d) $\log_6 36, \log_6 216, \log_6 1296, \log_6 7776$;
- e) $\log 100, \log 1\,000, \log 10\,000, \log 100\,000$;
- f) $\ln e^2, \ln e^3, \ln e^4, \ln e^5, \ln e^6$.

2 Halla los logaritmos de los siguientes números:

- a) $\log_2 \frac{1}{2}, \log_2 \frac{1}{4}, \log_2 \frac{1}{8}, \log_2 \frac{1}{16}, \log_2 \frac{1}{32}$;
- b) $\log_3 \frac{1}{3}, \log_3 \frac{1}{9}, \log_3 \frac{1}{27}, \log_3 \frac{1}{81}, \log_3 \frac{1}{243}$;
- c) $\log_5 \frac{1}{5}, \log_5 \frac{1}{25}, \log_5 \frac{1}{125}, \log_5 \frac{1}{625}, \log_5 \frac{1}{3125}$.

3 Halla el valor de x en las siguientes expresiones:

- a) $\log_x 25 = 2$;
- b) $\log_x 216 = 3$;
- c) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$;
- d) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$;
- e) $\log_x 3 = \frac{1}{2}$;
- f) $\log_x 343 = 3$;
- g) $\log_x \frac{1}{64} = -6$;
- h) $\log_x 5 = -\frac{1}{2}$;
- i) $\log_x \frac{1}{100} = -2$;
- j) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$;
- k) $\log_x 81 = -4$;
- l) $\log_x 49 = 2$.

4 Calcula el valor de las expresiones siguientes:

- a) $\log_2 \frac{\sqrt[6]{64} \cdot 4^2}{2^5 \cdot \sqrt[3]{512}}$;
- b) $\log_3 \frac{27 \cdot \sqrt[2]{729}}{81 \cdot \sqrt[3]{27}}$;
- c) $\log_5 \frac{25 \cdot \sqrt[4]{625}}{125}$;
- d) $\log_7 \frac{49 \cdot \sqrt[3]{343}}{\sqrt{2\,401}}$.

5 ¿cómo hallarías los siguientes logaritmos? solo con logaritmos decimales

- a) $\log_4 7$; b) $\log_5 12$; c) $\log_3 16$; d) $\log_6 13$.

¿cómo hallarías los siguientes logaritmos? solo con logaritmos neperianos

- a) $\log_2 5$; b) $\log_3 8$; c) $\log_4 11$; d) $\log_5 14$; e) $\log_7 18$.

6 Sabiendo que $\log 2 = 0,301030$ y que $\log 3 = 0,477121$, calcula estos logaritmos decimales:

- a) $\log 4$;
- b) $\log 5$;
- c) $\log 6$;
- d) $\log 8$;
- e) $\log 9$;
- f) $\log 12$;
- g) $\log 15$;
- h) $\log 16$;
- i) $\log 18$;
- j) $\log 20$;
- k) $\log 24$;
- l) $\log 25$;
- m) $\log 30$;
- n) $\log 32$;
- o) $\log 36$;
- p) $\log 40$;
- q) $\log 45$;
- r) $\log 48$;
- s) $\log 50$;
- t) $\log 54$;
- u) $\log 60$;
- v) $\log 64$;
- x) $\log 72$;
- y) $\log 75$.

7 Conociendo los valores de $\log 2$ y $\log 3$, halla los valores de las siguientes expresiones:

- a) $\log 14,4$;
- b) $\log 0,048$;
- c) $\log 2,88$;
- d) $\log 0,015$;
- e) $\log 36\,000$;
- f) $\log \sqrt{5,76}$;
- g) $\log \sqrt[3]{240}$;
- h) $\log \frac{\sqrt{5,4}}{12,8}$;
- i) $\log \frac{10,8}{\sqrt{14,4}}$;
- j) $\log 6,4 \cdot \sqrt{2,4}$;
- k) $\log \frac{1,25}{\sqrt{0,32}}$;
- l) $\log \sqrt{3,2} \cdot \sqrt{1,6}$;
- m) $\log \frac{\sqrt{0,025}}{8}$;
- n) $\log \frac{3,2^3 \cdot 0,64^5}{0,0125 \cdot \sqrt[4]{80^3}}$;
- o) $\log \frac{1}{6\,561}$;
- p) $\log \left(\frac{12}{5}\right)^5$;
- q) $\log \sqrt[3]{\frac{9}{5}}$;
- r) $\log \sqrt[4]{781,25}$.

8 Prueba que $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

9 Prueba que $\log e \cdot \ln 10 = 1$.

10 Si no dispones más que de tablas de logaritmos decimales, ¿cómo hallarías $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$ y $\ln 6$?

11 Halla estos logaritmos decimales:

- a) $\log 7$;
- b) $\log 17$;
- c) $\log 157$;
- d) $\log 313$;
- e) $\log 3,712$;
- f) $\log 1,23$;
- g) $\log 3,79$;
- h) $\log 4,21$.

12 Si la base de un sistema de logaritmos es $\frac{1}{2}$, ¿cómo son los logaritmos de los números mayores que la unidad? Razónalo.

13 ¿Qué números son los que tienen logaritmo negativo en el sistema de base 7?

SOLUCIONES

1

- a) $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$, $\log_2 16 = 4$, $\log_2 32 = 5$, $\log_2 64 = 6$;
 b) $\log_3 9 = 2$, $\log_3 27 = 3$, $\log_3 81 = 4$, $\log_3 243 = 5$, $\log_3 729 = 6$;
 c) $\log_5 25 = 2$, $\log_5 125 = 3$, $\log_5 625 = 4$, $\log_5 3125 = 5$;
 d) $\log_6 36 = 2$, $\log_6 216 = 3$, $\log_6 1296 = 4$, $\log_6 7776 = 5$;
 e) $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, $\log 10000 = 4$, $\log 100000 = 5$;
 f) $\ln e^2 = 2$, $\ln e^3 = 3$, $\ln e^4 = 4$, $\ln e^5 = 5$, $\ln e^6 = 6$.

2

- a) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, $\log_2 \frac{1}{32} = -5$;
 b) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, $\log_3 \frac{1}{27} = -3$, $\log_3 \frac{1}{81} = -4$, $\log_3 \frac{1}{243} = -5$;
 c) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$, $\log_5 \frac{1}{25} = -2$, $\log_5 \frac{1}{125} = -3$, $\log_5 \frac{1}{625} = -4$, $\log_5 \frac{1}{3125} = -5$.

5

Se expresa cada logaritmo en forma exponencial y luego se hallan logaritmos decimales. Se procede así:

- a) $\log_4 7 = x$; $4^x = 7$; $\log 4^x = \log 7$; $x \log 4 = \log 7$; $x = \frac{\log 7}{\log 4}$; $\log_4 7 = \frac{\log 7}{\log 4}$;
 b) $\log_5 12 = x$; $5^x = 12$; $x \log 5 = \log 12$; $x = \frac{\log 12}{\log 5}$;
 c) $\log_3 16 = \frac{\log 16}{\log 3}$; d) $\log_6 13 = \frac{\log 13}{\log 6}$.

Se procede de forma análoga al ejercicio anterior:

- a) $\log_2 5 = x$; $2^x = 5$; $x \ln 2 = \ln 5$; $x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$;
 b) $\log_3 8 = \frac{\ln 8}{\ln 3}$; c) $\log_4 11 = \frac{\ln 11}{\ln 4}$; d) $\lg_5 14 = \frac{\ln 14}{\ln 5}$; e) $\log_7 18 = \frac{\ln 18}{\ln 7}$.

3

- a) $\log_x 25 = 2$, equivale a: $x^2 = 25$, $x = 5$;
 b) $\log_x 216 = 3$, equivale a: $x^3 = 216$, $x = 6$;
 c) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} = 4$, $x = 16$;
 d) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$, $x^{-\frac{1}{2}} = 4$, $\frac{1}{\sqrt{x}} = 4$, $\sqrt{x} = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{16}$;
 e) $\log_x 3 = \frac{1}{2}$, $\sqrt{x} = 3$, $x = 9$;
 f) $\log_x 343 = 3$, $x^3 = 343 = 7^3$, $x = 7$;
 g) $\log_x \frac{1}{64} = -6$, $x^{-6} = \frac{1}{64} = 2^{-6}$, $x = 2$;
 h) $\log_x 5 = -\frac{1}{2}$, $x^{-\frac{1}{2}} = 5$, $\frac{1}{\sqrt{x}} = 5$, $\sqrt{x} = \frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{25}$;
 i) $\log_x \frac{1}{100} = -2$, $x^{-2} = \frac{1}{100} = 10^{-2}$, $x = 10$;
 j) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$, $x^{\frac{5}{2}} = 32$, $\sqrt{x^5} = 32 = 2^5$, $x^5 = 32^2 = 2^{10} = 4^5$, $x = 4$;
 k) $\log_x 81 = -4$, $x^{-4} = 81 = 3^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$, $x = \frac{1}{3}$;
 l) $\log_x 49 = 2$, $x^2 = 49 = 7^2$, $x = 7$.

4

- a) $\log_2 \frac{\sqrt[6]{64} \cdot 4^2}{2^5 \cdot \sqrt[3]{512}} = \frac{\log_2 64}{6} + 2 \log_2 4 - 5 \log_2 2 - \frac{\log_2 512}{3} = \frac{6}{6} + 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - \frac{9}{3} = -3$;
 b) $\log_3 \frac{27 \cdot \sqrt[3]{729}}{81 \cdot \sqrt[3]{27}} = \log_3 27 + \frac{\log_3 729}{2} - \log_3 81 - \frac{\log_3 27}{3} = 3 + \frac{6}{2} - 4 - \frac{3}{3} = 1$;
 c) $\log_5 \frac{25 \cdot \sqrt[4]{625}}{125} = \log_5 25 + \frac{\log_5 625}{4} - \log_5 125 = 2 + \frac{4}{4} - 3 = 0$;
 d) $\log_7 \frac{49 \cdot \sqrt[3]{343}}{\sqrt{2401}} = \log_7 49 + \frac{\log_7 343}{3} - \frac{\log_7 2401}{2} = 2 + \frac{3}{3} - \frac{4}{2} = 1$.

6

- a) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 2 \cdot 0,301030 = 0,602060$;
- b) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,301030 = 0,698970$;
- c) $\log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3 = 0,301030 + 0,477121 = 0,778151$;
- d) $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \cdot 0,301030 = 0,903090$;
- e) $\log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3 = 2 \cdot 0,477121 = 0,954242$;
- f) $\log 12 = \log 2^2 \cdot 3 = 2 \log 2 + \log 3 = 0,602060 + 0,477121 = 1,079181$;
- g) $\log 15 = \log \frac{3 \cdot 10}{2} = \log 3 + \log 10 - \log 2 = 1,477121 - 0,301030 = 1,176091$;
- h) $\log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4 \cdot 0,301030 = 1,204120$;
- i) $\log 18 = \log 2 \cdot 3^2 = \log 2 + 2 \log 3 = 0,301030 + 0,954242 = 1,255272$;
- j) $\log 20 = \log 2 \cdot 10 = \log 10 + \log 2 = 1 + 0,301030 = 1,301030$;
- k) $\log 24 = \log 2^3 \cdot 3 = 3 \log 2 + \log 3 = 0,903090 + 0,477121 = 1,380211$;
- l) $\log 25 = \log \frac{100}{2} = \log 100 - \log 2 = 2 - 0,301030 = 1,698970$;
- m) $\log 30 = \log 10 + \log 3 = 1 + 0,477121 = 1,477121$;
- n) $\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5 \cdot 0,301030 = 1,505150$;
- o) $\log 36 = \log 2^2 \cdot 3^2 = 2 \log 2 + 2 \log 3 = 0,602060 + 0,954242 = 1,556302$;
- p) $\log 40 = \log 10 \cdot 2^2 = \log 10 + 2 \log 2 = 1 + 0,602060 = 1,602060$;
- q) $\log 45 = \log \frac{3^2 \cdot 10}{2} = 2 \log 3 + \log 10 - \log 2 = 0,954242 + 1 - 0,301030 = 1,653212$;
- r) $\log 48 = \log 2^4 \cdot 3 = 4 \log 2 + \log 3 = 4 \cdot 0,301030 + 0,477121 = 1,681241$;
- s) $\log 50 = \log \frac{100}{2} = \log 100 - \log 2 = 2 - 0,301030 = 1,698970$;
- t) $\log 54 = \log 2 \cdot 3^3 = \log 2 + 3 \log 3 = 0,301030 + 3 \cdot 0,477121 = 1,732393$;
- u) $\log 60 = \log 2 \cdot 3 \cdot 10 = \log 10 + \log 2 + \log 3 = 1,301030 + 0,477121 = 1,778151$;
- v) $\log 64 = \log 2^6 = 6 \log 2 = 6 \cdot 0,301030 = 1,806180$;
- x) $\log 72 = \log 2^3 \cdot 3^2 = 3 \log 2 + 2 \log 3 = 3 \cdot 0,301030 + 2 \cdot 0,477121 = 1,857332$;
- y) $\log 75 = \log \frac{3 \cdot 100}{2} = \log 100 + \log 3 - \log 2 = 2,477121 - 0,301030 = 2,176091$.

7

- a) $\log 14,4 = \log \frac{144}{10} = \log 144 - \log 10 = \log 2^4 \cdot 3^2 - \log 10 = 4 \log 2 + 2 \log 3 - 1 =$
 $= 4 \cdot 0,301030 + 2 \cdot 0,477121 - 1 = 1,204120 + 0,954242 - 1 = 1,158362$;
- b) $\log 0,048 = \log \frac{48}{1000} = \log 48 - \log 1000 = \log 2^4 \cdot 3 - 3 = 4 \log 2 + \log 3 - 3 =$
 $= 1,204120 + 0,477121 - 3 = 1,681241 - 3 = -1,318759$;
- c) $\log 2,88 = \log \frac{288}{100} = \log 2^5 \cdot 3^2 - \log 100 = 5 \log 2 + 2 \log 3 - 2 =$
 $= 1,505150 + 0,954242 - 2 = 0,459392$;
- d) $\log 0,015 = \log \frac{15}{1000} = \log \frac{30}{2} - \log 1000 = \log 3 + \log 10 - \log 2 - 3 =$
 $= 0,477121 + 1 - 0,301030 - 3 = -1,123869$;
- e) $\log 36000 = \log 36 + \log 1000 = 2 \log 2 + 2 \log 3 + 3 =$
 $= 0,602060 + 0,954242 + 3 = 4,556302$;
- f) $\log \sqrt{5,76} = \frac{\log 576 - \log 100}{2} = \frac{\log 2^6 \cdot 3^2 - 2}{2} = \frac{6 \log 2 + 2 \log 3 - 2}{2} =$
 $= 3 \log 2 + \log 3 - 1 = 3 \cdot 0,301030 + 0,477121 - 1 = 0,380211$;
- g) $\log \sqrt[3]{240} = \frac{\log 240}{3} = \frac{\log 2^3 \cdot 3 \cdot 10}{3} = \frac{3 \log 2 + \log 3 + \log 10}{3} =$
 $= \frac{3 \cdot 0,301030 + 0,477121 + 1}{3} = \frac{2,380211}{3} = 0,793403$;
- h) $\log \frac{\sqrt{5,4}}{12,8} = \frac{\log 5,4}{2} - \log 12,8 = \frac{\log 54 - \log 10}{2} - (\log 128 - \log 10) =$
 $= \frac{\log 2 + 3 \log 3 - \log 10}{2} - 7 \log 2 + \log 10 =$
 $= \frac{0,301030 + 1,431363 - 1}{2} - 7 \cdot 0,301030 + 1 = \frac{0,732393}{2} - 2,107210 + 1 =$
 $= 0,366196 - 1,107210 = -0,741014 = -1,741014$;
- i) $\log \frac{10,8}{\sqrt{14,4}} = \log 10,8 - \frac{\log 14,4}{2} = \log 108 - \log 10 - \frac{\log 144 - \log 10}{2} =$
 $= \log 2^2 \cdot 3^3 - \log 10 - \frac{\log 2^4 \cdot 3^2 - \log 10}{2} = 2 \log 2 + 3 \log 3 - 1 -$
 $= \frac{4 \log 2 + 2 \log 3 - 1}{2} = 0,602060 + 1,431363 - 1 = \frac{1,204120 + 0,954242 - 1}{2} =$
 $= 1,033423 - \frac{1,158362}{2} = 1,033423 - 0,579181 = 0,454242$;

7

$$j) \log 6,4 \cdot \sqrt{2,4} = \log 6,4 + \frac{\log 2,4}{2} = \log 2^6 - \log 10 + \frac{\log 2^3 \cdot 3 - \log 10}{2} -$$

$$= 6 \log 2 - 1 + \frac{3 \log 2 + \log 3 - 1}{2} = 0,806180 + \frac{0,380211}{2} = 0,996285;$$

$$k) \log \frac{1,25}{\sqrt{0,32}} = \log \frac{10}{8} - \frac{\log 2^5 - \log 100}{2} = \log 10 - 3 \log 2 - \frac{5 \log 2 - 2}{2} =$$

$$= 1 - 0,903090 - \frac{1,505150 - 2}{2} = 0,096910 + 0,247425 = 0,344335;$$

$$l) \log \sqrt{3,2} \cdot \sqrt{1,6} = \frac{\log 2^5 - \log 10}{2} + \frac{\log 2^4 - \log 10}{2} = \frac{9 \log 2 - 2}{2} = \frac{0,709270}{2} =$$

$$= 0,354635;$$

$$m) \log \frac{\sqrt{0,025}}{8} = \frac{\log 25 - \log 1000}{2} - \log 8 = \frac{\log 100 - \log 4 - \log 1000}{2} - 3 \log 2 =$$

$$= \frac{-1,602060}{2} - 0,903090 = -0,801030 - 0,903090 = -1,704120;$$

$$n) \log \frac{3,2^3 \cdot 0,64^5}{0,0125 \cdot \sqrt[4]{80^3}} =$$

$$3(\log 32 - \log 10) + 5(\log 64 - \log 100) - (\log 125 - \log 10000) - \frac{3 \log 80}{4} =$$

$$= 15 \log 2 - 3 + 30 \log 2 - 10 - (\log 1000 - \log 8) + 4 - \frac{9 \log 2 + 3}{4} =$$

$$= 45 \log 2 - 13 - 3 + 3 \log 2 + 4 - \frac{9 \log 2 + 3}{4} = 48 \log 2 - 12 - \frac{9 \log 2 + 3}{4} =$$

$$= 48 \cdot 0,301030 - 12 - \frac{9 \cdot 0,301030 + 3}{4} = 14,449440 - 12 - \frac{5,709270}{4} =$$

$$= 2,449440 - 1,427317 = 1,022123;$$

$$o) \log \frac{1}{6561} = \log 1 - \log 6561 = -\log 3^8 = -8 \log 3 = -8 \cdot 0,477121 =$$

$$= -3,816968 = -3,816968;$$

$$p) \log \left(\frac{12}{5} \right)^5 = 5 \log \frac{24}{10} = 5 \log 24 - 5 = 5 \log 2^3 \cdot 3 - 5 = 15 \log 2 + 5 \log 3 - 5 =$$

$$= 4,515450 + 2,385605 - 5 = 1,901055;$$

$$q) \log \sqrt[3]{\frac{9}{5}} = \frac{\log \frac{9}{5}}{3} = \frac{\log 18 - \log 10}{3} = \frac{\log 2 + 2 \log 3 - 1}{3} = 0,085090;$$

$$r) \log \sqrt[4]{781,25} = \frac{\log 781,25 - \log 100}{4} = \frac{\log 5^7 - 2}{4} = \frac{7 \log 10 - 7 \log 2 - 2}{4} =$$

$$= \frac{5 - 2,107210}{4} = \frac{2,892790}{4} = 0,723197.$$

8

Hacemos $\log_a b = x$; se pasa a la forma exponencial: $a^x = b$.

Se hallan logaritmos en base b: $x \log_b a = 1$.

Se sustituye x por su valor: $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

9

Se procede como en el caso anterior:

$$\log e = x \rightarrow 10^x = e \rightarrow x \ln 10 = 1 \rightarrow \log e \cdot \ln 10 = 1.$$

10

$$\ln 2 = \frac{\log 2}{\log e} = \log 2 \cdot \frac{1}{\log e} = \log 2 \cdot \ln 10 = 2,302585 \log 2;$$

$$\ln 3 = \frac{\log 3}{\log e} = 2,302585 \log 3; \quad \ln 5 = 2,302585 \log 5; \quad \ln 6 = 2,302585 \log 6.$$

11

$$a) \log 7 = 0,8451; \quad b) \log 17 = 1,2304; \quad c) \log 157 = 2,1959;$$

$$d) \log 313 = 2,4955; \quad e) \log 3,712 = 0,5696; \quad f) \log 1,23 = 0,0899;$$

$$g) \log 3,79 = 0,5786; \quad h) \log 4,21 = 0,6243.$$

12

Sea $\log_{\frac{1}{2}} N = x$; equivale a $\left(\frac{1}{2}\right)^x = N$.

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ es decreciente, x debe ser negativo para que sea $N > 1$.

13

Como la base es mayor que 1, tienen logaritmo negativo los números comprendidos entre 0 y 1.