LOGARITMOS

DEFINICIÓN

Forma Logarítmica — *Forma Exponencial*

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

*Y se lee "logaritmo en base **a** de **x**"*

$$\forall\ a>0 \wedge a\neq 1\ ;\ x>0\ ;\ y\in\mathbb{R}$$

De la definición deducimos que:

$$a^{\log_a x} = x$$

El logaritmo de un número es un exponente, y solo eso.

Propiedades

① $\log_a (P\cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$

② $\log_a \left(\dfrac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$

③ $\log_a P^n = n\cdot\log_a N$

④ $\log_a \sqrt[n]{P} = \dfrac{\log_a P}{n}$

Observaciones

El cero no tiene logaritmo:

$$\log_a 0 \rightarrow \nexists$$

Los números negativos no tienen logaritmo:

$$\log_a(-k) \rightarrow \nexists\ ;\ k>0$$

Logaritmos decimales

$$\log_{10} N = \log N$$

Logaritmos neperianos

$$\log_e N = \ln N$$

CAMBIO DE BASE

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

- $\log_a N = \dfrac{\log N}{\log a} = \dfrac{\ln N}{\ln a}$
- $\log_a P = \dfrac{1}{\log_P a}$
- $\log_a \left(\dfrac{P}{Q}\right) = -\log_a \left(\dfrac{Q}{P}\right)$
- $\log_{\frac{1}{a}} P = -\log_a P$
- $\log \dfrac{1}{P} = -\log P = co\log P$

Antilogaritmo

$$\log_a x = y \Rightarrow Anti\log_a y = x \iff a^y = x$$

Ejemplo

$$Si\ \ \log N = \log_{10} N = 2{,}1673 \Rightarrow N = 10^{2{,}1673} = 147$$

también se escribe: $Anti\log 2{,}1673 = 147$

Igualdades

De la definición de logaritmo y de sus propiedades deducimos las siguientes igualdades:

- $\log_a 1 = 0 \quad pues \quad a^0 = 1$
- $\log_a a = 1 \quad pues \quad a^1 = a$
- $\log_a a^n = n$
- $\log_a P = \log_{a^n} P^n = \log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{P}$
- $\log_{a^n} P^m = \dfrac{m}{n}\cdot\log_a P \quad ; \quad \log_{a^n} a^m = \dfrac{m}{n}$
- $\log_{a^n} P = \dfrac{1}{n}\cdot\log_a P \quad ; \quad \log_{a^n} a = \dfrac{1}{n}$
- $\log_{\sqrt[n]{a}} P = n\cdot\log_a P \quad ; \quad \log_{\sqrt[n]{a}} a = n$

Otras relaciones:

- $\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_d c\cdot\log_e d = \log_e a \quad "regla\ de\ la\ cadena"$
- $\log_a^n P = (\log_a P)^n = \underbrace{(\log_a P)\cdot(\log_a P)\ldots(\log_a P)}_{n-veces}$

Equivalencias

$\log 2 = 0{,}3010$

$\log 3 = 0{,}4771$

$\log e = 0{,}4343$

$\ln 2 = 0{,}6931$

$\ln 3 = 1{,}0986$

$\ln 10 = 2{,}3026$

$\log N = 0{,}4343\cdot\ln N$

$\ln N = 2{,}3026\cdot\log N$

$\log 5 = \log\dfrac{10}{2} = 1 - \log 2$

Los logaritmos fueron introducidos en matemáticas con el propósito de facilitar, simplificar o hacer posible complicados y tediosos cálculos numéricos.

Utilizando logaritmos podemos convertir productos en sumas, cocientes en restas, potencias en productos y raíces en cocientes.

El método de cálculo mediante logaritmos aparece en el siglo XVII gracias a los trabajos independientes de Neper y Bürgi. Los logaritmos se emplearon habitualmente en astronomía, geodesia, navegación marítima y matemática.

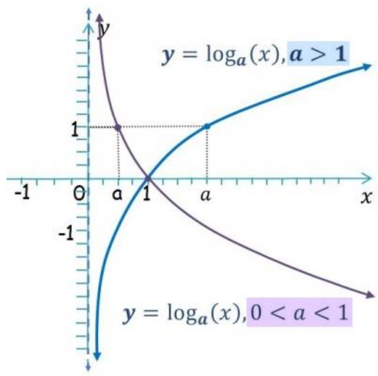
APLICACIONES: *Geología*: escala Richter; *Química*: cálculo de pH; *Arqueología*: velocidad desintegración del C^{14}; *Física*: intensidad sonora; *Medicina*: concentración de alcohol en sangre, etc...

Hasta la llegada de las calculadoras y los ordenadores los logaritmos fueron muy utilizados por científicos, ingenieros, ... para realizar operaciones más fácil y rápidamente, usando reglas de cálculo y tablas de logaritmos.

- La constante ***a*** es un número real positivo distinto de 1 y se denomina base del sistema de logaritmos.
- El número ***N*** debe ser un número real positivo
- El exponente ***b*** puede ser cualquier número real

SIGNO

logaritmos	$a>1$	$0<a<1$
$N>1$	+	−
$0<N<1$	−	+



Es decir, la operación de logaritmación ("extracción de logaritmos" o "tomar logaritmos") es siempre posible en el campo real cuando tanto la base ***a*** como el número ***N*** son positivos.

La base puede ser cualquier número pero las más frecuentes son la base *10* (logaritmos decimales) y la base *e* (logaritmos neperianos) y lo habitual es no escribir la base.