INCIDENCIA, PARELELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Incidencia de Punto y Recta

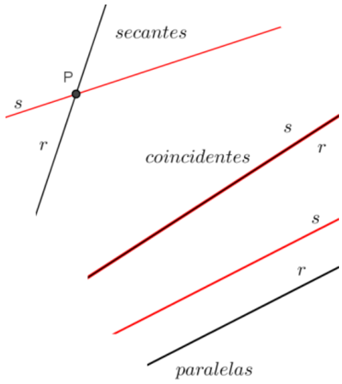
Se dice que una recta y un punto son incidentes cuando el punto está contenido en la recta. Es decir, un punto pertenece a una recta cuando las coordenadas del punto verifican la ecuación de la recta.

$$\textit{Dada la recta } r: Ax+By+C=0 \quad \textit{y el punto} \quad P(x_1,y_1)$$

$$\textit{Si} \quad P\in r \quad \textit{entonces} \quad Ax_1+By_1+C=0$$

Posiciones de dos rectas en el plano

Las coordenadas del punto de intersección de dos rectas las obtenemos al resolver el sistema formado por las ecuaciones de ambas.



$$\left.\begin{array}{l} r\equiv \quad Ax+By+C=0 \\ s\equiv \quad A'x+B'y+C'=0 \end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{v_r}=(-B,A) \quad ; \quad \overrightarrow{v_s}=(-B',A')$$

Ahora bien, sabemos que al resolver un sistema podemos encontrarnos tres situaciones:

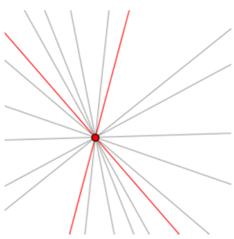
- Si el sistema es compatible determinado (admite una solución), las rectas son **secantes**. Las soluciones del sistema son las coordenadas del punto de intersección
- Si el sistema es compatible indeterminado (admite infinitas soluciones), las rectas son **coincidentes**. Hay infinitos puntos comunes
- Si el sistema es incompatible (no tiene solución), las rectas son **paralelas**. No tienen ningún punto en común

No obstante, para demostrar si dos rectas son paralelas o no, no es necesario resolver el sistema, basta con recurrir a la geometría vectorial y estudiar sus ecuaciones

Posiciones	*Vectores directores*	*Pendientes*	*Coeficientes Ec. general*
Paralelas	Proporcionales $\dfrac{u_1}{u_2}=\dfrac{v_1}{v_2}$	Iguales $m=m'$	$\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}\neq\dfrac{C}{C'}$
Coincidentes	Proporcionales $\dfrac{u_1}{u_2}=\dfrac{v_1}{v_2}$	Iguales $m=m'$	$\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}$
Secantes	NO proporcionales $\dfrac{u_1}{u_2}\neq\dfrac{v_1}{v_2}$	Distintas $m\neq m'$	$\dfrac{A}{A'}\neq\dfrac{B}{B'}$

Haz de rectas

La ecuación correspondiente al haz constituido por las infinitas rectas que pasan por el punto de intersección de dos rectas dadas se obtienen sumando, miembro a miembro, las ecuaciones de las dos rectas, previamente multiplicada una de ellas por una constante indeterminada.



$$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

Condición de Perpendicularidad de dos rectas

Si dos rectas, *r* y *s*, son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es igual a la inversa de la otra con signo contrario. Es decir, dos rectas perpendiculares forman un ángulo de 90º

Si las rectas vienen dadas en forma explícita

$$r\equiv \quad y=m_1x+b_1 \quad ; \quad s\equiv \quad y=m_2x+b_2$$

$$r\perp s \iff m_2=-\frac{1}{m_1} \implies m_1\cdot m_2=-1$$

Si las rectas vienen dadas en forma general

$$r\equiv \quad A_1x+B_1y+C_1=0 \quad ; \quad s\equiv \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

$$r\perp s \iff \frac{A_1}{B_1}=-\frac{B_2}{A_2} \implies A_1A_2+B_1B_2=0$$

$$\textit{También}: \; r\perp s \iff \cos(r,s)=\cos 90^\circ=0$$

Condición de Paralelismo de dos rectas

Si dos rectas, *r* y *s*, son paralelas, sus pendientes son iguales. Es decir, dos rectas paralelas forman un ángulo de 0º

Si las rectas vienen dadas en forma explicita

$$r\equiv \quad y=mx+b \quad ; \quad s\equiv \quad y=m'x+b'$$

$$r\parallel s \iff m=m'$$

Si las rectas vienen dadas en forma general

$$r\equiv \quad A_1x+B_1y+C_1=0 \quad ; \quad s\equiv \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

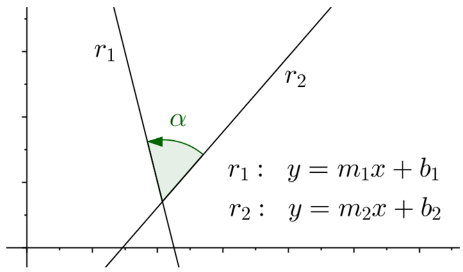
$$r\parallel s \iff \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$$

$$\textit{También}: \; r\parallel s \iff \cos(r,s)=\cos 0^\circ=1$$

Ángulo de dos rectas

El ángulo α, medido en el sentido contrario al de las agujas del reloj, desde la recta r_2 de pendiente m_2 a la recta r_1 de pendiente m_1 es, si las rectas vienen dadas en forma explícita,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}$$

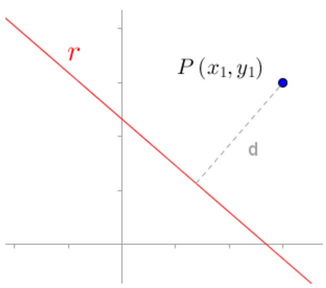


Consideramos el ángulo de dos rectas como el menor, en valor absoluto, de los ángulos que dichas rectas forman al cortarse.

Como es obvio, una vez conocido el valor de la tangente, se determina el ángulo con la calculadora o con unas tablas trigonométricas.

Distancia de un punto a una recta

Consideremos la recta *r*, cuya ecuación general es $Ax+By+C=0$, y el punto P, de coordenadas (x_1,y_1), la distancia de P a *r* se obtiene sustituyendo dichos valores en la expresión siguiente:



$$\boxed{\mathrm{d}=\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$