Progresión aritmética

Quizás la forma más fácil de generar una sucesión es empezar con un número a y sumarle una cantidad constante d, una vez y otra hasta conseguir el número de términos que queramos.

Una progresión aritmética es una sucesión real en la que cada uno de los términos, excepto el primero, se obtiene *sumando* al anterior una constante d, que se denomina **diferencia** de la progresión; es decir, la diferencia entre cada término y el término anterior es siempre el mismo valor d.

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \ldots$$

Una progresión aritmética es **creciente** cuando la diferencia es positiva, y **decreciente** cuando es negativa. En las crecientes un término cualquiera es mayor que todos los anteriores; en las decrecientes ocurre lo contrario. Además, según el número de términos, una progresión aritmética puede ser **limitada** o **ilimitada**.

Ejemplos

Si $a=3$ y $d=5$, entonces tenemos la progresión aritmética creciente:

$$3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, \ldots$$

Si $a=5$ y $d=-4$, entonces tenemos la progresión aritmética decreciente:

$$5, 1, -3, -7, -11, -15, -19, \ldots$$

TÉRMINO GENERAL DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

A partir del primer término a_1 y conociendo la diferencia d

$$d = a_n - a_{n-1} \; ; \; \boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$$

También a partir de un término cualquiera a_k

$$a_n = a_k + (n-k)\cdot d$$

De estas expresiones, con 4 incógnitas, podemos hallar cualquiera de ellas si conocemos el valor de las 3 restantes.

Ejemplo

Hallar el término general de la sucesión $7, 2, -3, -8, -13, \ldots$

$$\mathrm{a}_1 = 7 \; ; \; d = 2-7 = -5 \quad \rightarrow \quad d = -5$$

$$a_n = 7 + (n-1)\cdot(-5) = \boxed{-5n+12}$$

SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA LIMITADA

La suma de los términos de una progresión aritmética limitada es igual a la semisuma de los términos extremos multiplicada por el número de términos:

$$\boxed{S = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n}$$

También podemos sumar n términos consecutivos de una progresión geométrica, comenzando en el término a_k:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_k + a_{k+n-1})\cdot n}{2}}$$

Mediante el sistema siguiente y, conociendo tres de las variables se pueden determinar las dos restantes:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \\ S = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} a_1, a_n, \\ d, n \text{ y } S \end{array}$$

Ejemplo

Hallar la suma de los primeros 40 términos de la progresión:

$$3, 7, 11, 15, \ldots \quad ; \quad \mathrm{a}_1 = 3 \quad ; \quad d = 7-3 = 4 \quad \rightarrow \quad d = 4$$

$$a_{40} = 3 + (40-1)\cdot 4 = 159 \quad ; \quad S_{40} = \frac{3+159}{2}\cdot 40 = \boxed{3\,204}$$

Ejemplo

Un anfiteatro tiene 25 filas de butacas con 20 butacas en la primera fila, 24 en la segunda, 28 en la tercera, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas pueden sentarse?

$$20, 24, 28, 32, 36, \ldots \quad ; \quad \mathrm{a}_1 = 20 \; ; \; d = 24-20 = 4 \rightarrow d = 4$$

$$a_{25} = 20 + (25-1)\cdot 4 = 116 \quad ; \quad S_{25} = \frac{20+116}{2}\cdot 25 = \boxed{1\,700}$$

TÉRMINOS EQUIDISTANTES DE LOS EXTREMOS

La suma de dos términos de una progresión aritmética limitada, equidistantes de los términos extremos, es igual a la suma de dichos extremos.

$$\div \underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{n-\text{términos}} \quad \rightarrow \quad \boxed{a_{h+1} + a_{n-h} = a_1 + a_n}$$

NOTA: *cuando el número de términos es impar, el término medio es la semisuma de los términos de los extremos.*

INTERPOLACIÓN ARITMÉTICA

Interpolar m medios aritméticos entre dos números a y b significa hallar m números $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de tal forma que la sucesión $a, x_1, x_2, \ldots, x_m, b$ sea una progresión aritmética de $m+2$ términos.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \;\rightarrow\; b = a + (m+2-1)d \;\rightarrow\; \boxed{d = \frac{b-a}{m+1}}$$

Conociendo d, se hallan fácilmente los m términos de esta forma:

$$x_1 = a+d \; ; \; x_2 = a+2d \; ; \; x_3 = a+3d \; ; \; \ldots \; ; \; x_m = a+md$$

Ejemplo

Interpolar cinco medios aritméticos entre los números 20 y 38

$$d = \frac{38-20}{5+1} = \frac{18}{6} = 3 \quad \rightarrow \quad d = 3$$

$$x_1 = 20+3 = 23 \; ; \; x_2 = 26 \; ; x_3 = 29 \; ; x_4 = 32 \; ; x_5 = 35$$

La sucesión es. $20, \underbrace{23, 26, 29, 32, 35}_{5 \text{ medios interpolados}}, 38$

Progresión geométrica

Es una sucesión real en la que cada uno de los términos, excepto el primero, se obtiene *multiplicando* el anterior por una constante r, que se denomina **razón** de la progresión; es decir, el cociente entre cada término y el término anterior es siempre el mismo valor r.

- Según el número de términos, una progresión geométrica puede ser **limitada** o **ilimitada**.
- Cuando la razón de una progresión geométrica es positiva, todos los términos tienen el mismo signo; cuando es negativa, los términos tienen alternativamente signo positivo y negativo o viceversa.
- Cuando la razón, en valor absoluto, es menor que la unidad, los términos de la progresión decrecen en valor absoluto, y viceversa.

$$|r|<1 \;\rightarrow\; |términos| \Rightarrow Decrecen$$
$$|r|>1 \;\rightarrow\; |términos| \Rightarrow Crecen$$

TÉRMINO GENERAL DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

A partir del primer término a_1 y conociendo la razón r

$$r=\frac{a_n}{a_{n-1}} \quad ; \quad \text{Término general: } \boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

TÉRMINOS EQUIDISTANTES DE LOS EXTREMOS

El producto de dos términos de una progresión geométrica limitada, equidistantes de los términos extremos, es igual al producto de dichos extremos.

$$\div\!\!\div\; \underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{n-\text{términos}} \;\rightarrow\; \boxed{a_{h+1}\cdot a_{n-h} = a_1 \cdot a_n}$$

INTERPOLACIÓN GEOMÉTRICA

Interpolar m medios geométricos entre dos números a y b significa hallar m números $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de tal forma que la sucesión $a, x_1, x_2, \ldots, x_m, b$ sea una progresión geométrica de $m+2$ términos.

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} \;\rightarrow\; b = a \cdot r^{m+2-1} \;\rightarrow\; \boxed{r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}}$$

Conociendo r, se hallan fácilmente los m términos de esta forma:

$$x_1 = a\cdot r \;;\; x_2 = a \cdot r^2 \;;\; x_3 = a\cdot r^3 \;;\; \ldots \;;\; x_m = a \cdot r^m$$

PRODUCTO DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA LIMITADA

El producto de los términos de una progresión geométrica limitada es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos elevado a un exponente igual al número de términos.

$$\boxed{P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA LIMITADA

Sea una progresión geométrica **limitada**, de n términos y de razón r:

$$\div\!\!\div\; a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \ldots, a_1 r^{n-1}$$

Si conocemos el primer término, la razón y el número de términos aplicamos la fórmula:

$$Sabiendo \;\; a_1, n, r \;\rightarrow\; \boxed{S_n = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1}}$$

Si conocemos el primer término, el último término y la razón aplicamos la fórmula:

$$Sabiendo \;\; a_1, a_n, r \;\rightarrow\; \boxed{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}}$$

Deduciendo ésta de la primera de así:

$$S_n = \frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^{n-1}\cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA ILIMITADA

Sea una progresión geométrica **ilimitada** de razón r:

$$\div\!\!\div\; a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \ldots, a_1 r^n, \ldots$$

Si $|r|>1 \;\Rightarrow\; r^n$ crece

Si la razón, en valor absoluto, es mayor que la unidad, el valor de r^n crece indefinidamente en valor absoluto y el valor absoluto de la suma será mayor que cualquier número k, por grande que sea. Es decir, la suma tiende a más o menos infinito:

$$S_n = +\infty \quad ó \quad S_n = -\infty$$

Si $|r|<1 \;\Rightarrow\; r^n$ decrece

Si la razón, en valor absoluto, es menor que la unidad, el valor de r^n decrece indefinidamente y se hace menor que cualquier número $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea. Es decir, r^n tiende a cero, con lo que la suma la calculamos así:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1}{1-r}}$$

Si $|r|=1 \;\Rightarrow\;$ hay dos posibilidades

a) Que $r=+1$, la suma tiende a más infinito o menos infinito según el signo de a_1

$$S_n = +\infty \quad ó \quad S_n = -\infty$$

b) Que $r=-1$, la suma es igual a a_1 o a cero, según que n sea impar o par

$$S_n = a_1 \quad ó \quad S_n = 0$$