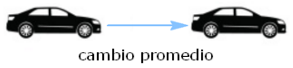
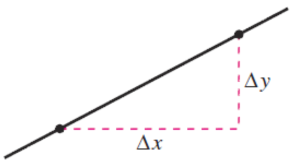
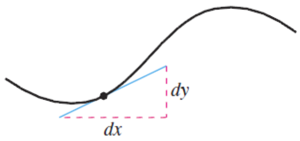
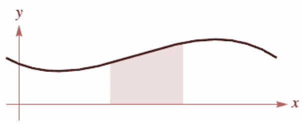
Límites (PARTE 1)

IDEA INTUITIVA

El cálculo es la matemática de los cambios, estos son algunos ejemplos:

Precálculo	Cálculo
Analizamos un objeto que se mueve a velocidad constante. 	Analizamos un objeto sometido a aceleración 
Estudiamos la pendiente de una recta 	Estudiamos la pendiente de una curva 
Analizamos el área de un rectángulo 	Analizamos el área bajo una curva 

La noción de límite es fundamental para el estudio del cálculo.

> *Si una cantidad no negativa fuera tan pequeña como para ser menor que cualquier otra, ciertamente no podría ser otra cosa sino cero. No hay, pues, tantos misterios ocultos en este concepto de lo infinitamente pequeño como habitualmente se cree.*
>
> L. Euler (1707-1783).

Matemáticas previas la cálculo ➡ Proceso de Límite ➡ Cálculo

ESTIMACIÓN NUMÉRICA Y GRÁFICA DE LÍMITE

Supongamos que nos piden dibujar la gráfica de la función $f(x)$.

Para todos los valores distintos de $x=2$ la representamos como cualquier otra curva. Sin embargo, en $x=2$, no está claro qué esperar.

Para hacernos una idea del comportamiento de la gráfica de f cerca de $x=2$, podemos crear dos conjuntos de valores de x, uno con valores algo menores a 2 (muy próximos por la izquierda) y otro con valores algo mayores a 2 (muy próximos por la derecha).

x se acerca a 2 por la izquierda → ← *x* se acerca a 2 por la derecha

1,500	1,750	1,900	1,990	1,999	2	2,001	2,010	2,100	2,250	2,500
1,250	2,063	2,610	2,960	2,996	?	3,004	3,040	3,410	4,063	5,250

f(x) se aproxima a 3 → ← *f(x)* se aproxima a 3

Esta tabla representa:

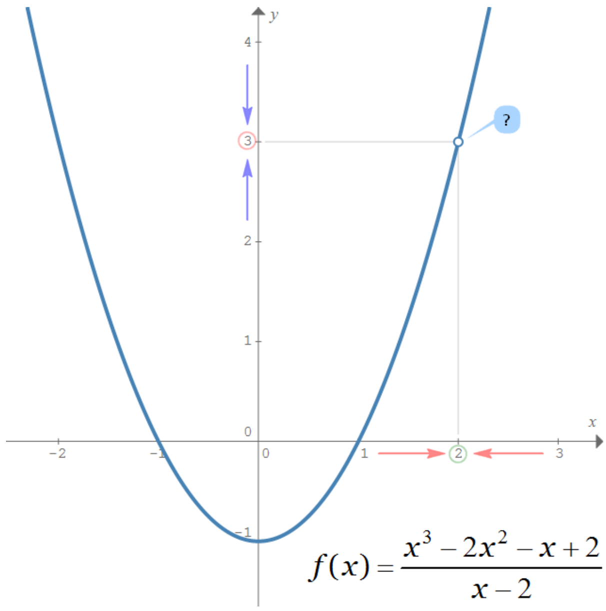
- El límite lateral por la izquierda $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$, (el símbolo c^- indica que estamos a la izquierda de c, es decir, $x<c$)
- Y el límite lateral por la derecha $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$, (el símbolo c^+ indica que estamos a la derecha de c, es decir, $x>c$)

Como vemos, la gráfica es una parábola con un **hueco** en el punto (2,3). A pesar de que x no puede ser igual a 2, nos podemos acercar arbitrariamente a 2, y en consecuencia, vemos que $f(x)$ se acerca a 3 de la misma manera.

Esto, en notación de límites, se escribe así: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$

Y se lee "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 3"

Gráficamente observamos el mismo resultado.



Cuando x se acerca a 2 por cualquiera de los lados, $f(x)$ se aproxima a 3. De hecho, podemos acercar los valores de $f(x)$ a 3 tanto como queramos haciendo que x se aproxime lo suficiente a 2.

En resumen, no necesitamos saber lo que ocurre en $x=2$, ni siquiera tiene porqué estar definida la función en dicho punto (como es el caso), sólo nos interesa lo que le pasa a la función cuando estamos cerca de 2.

DEFINICIÓN INFORMAL DE LÍMITE

Escribimos $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$

y leemos: "el límite de $f(x)$, cuando x tiende a c, es igual a L" si podemos aproximar los valores de $f(x)$ tanto como queramos a L tomando valores de x muy cercanos a c, pero no igual a c.

Es decir, esto nos dice que los valores de $f(x)$ se aproximan más y más al número L cuando x se acerca cada vez más al número c, tanto por su lado izquierdo como por su lado derecho, siendo $x\neq c$.

Que exista o no $f(x)$ en $x=c$ no guarda relación con la existencia del límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c. Lo único que importa es cómo está definida f cerca de c.

Además, algunas funciones carecen de límite cuando $x\to c$, pero aquellas que lo poseen no pueden tener dos límites diferentes cuando $x\to c$. Es decir:

Si el límite de una función existe, entonces es único.

Y también, si una función tiene límite cuando $x\to c$, los límites laterales cuando $x\to c^-$ y cuando $x\to c^+$ deben ser iguales.

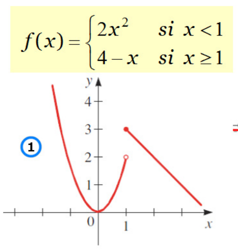
$$\lim_{x\to c} f(x)=\mathrm{L} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to c^-} f(x)=\mathrm{L} \;\; y \;\; \lim_{x\to c^+} f(x)=\mathrm{L}$$

Normalmente cuando trabajamos con funciones "a trozos" o racionales con asíntotas verticales debemos recurrir a los límites laterales.

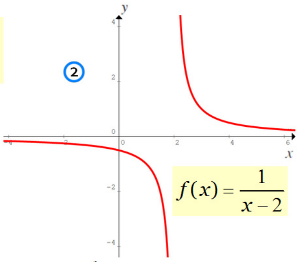
A veces el límite no existe

No necesariamente las funciones se aproximan a un valor finito en todo punto. En otras palabras, es posible que un límite no exista. Ejemplos:

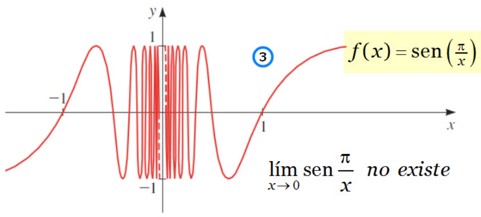
1. $f(x)$ se aproxima a números diferentes por la derecha de c y por la izquierda de c (función con un salto).
2. $f(x)$ aumenta o disminuye sin tope a medida que x se aproxima a c (función con asíntota vertical).
3. $f(x)$ cambia entre dos valores fijos a medida que x se aproxima a c (función que oscila).



$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *no existe*



$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$ *no existe*



$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$ *no existe*

Definición Formal de Límite

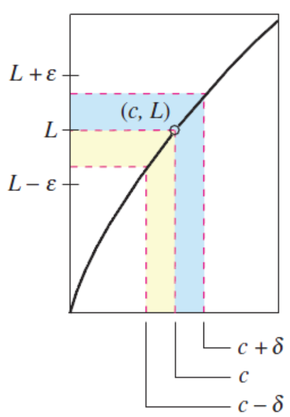
Después de lo visto es necesario dar un significado más preciso a estas dos frases:

« Si tomamos valores de x muy cercanos a c »
y « $f(x)$ se aproxima tanto como queramos a L »

Definición formal de Límite

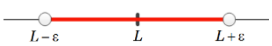
$$\lim_{x\to c} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta_{(\varepsilon)}>0 / \text{Si } 0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

La expresión $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ indica que el límite existe y es igual a L



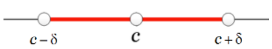
ε letra griega *épsilon*
δ letra griega *delta*

Entorno centrado en L de radio ε



$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

Entorno reducido (sin el punto c) centrado en c de radio δ



$$0<|x-c|<\delta$$

Observación: No suponer las “operaciones con infinito” con propiedades análogas a las operaciones con números. Estas propiedades son correctas suponiendo previamente que existe el límite de cada sumando y de cada factor del producto.

Propiedades de los límites

Hemos visto que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c no depende del valor de f en $x=c$. Sin embargo puede darse el caso de que este límite sea $f(c)$. En esta situación podemos calcular el límite por **sustitución directa**, es decir:

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$$

Las funciones con este “buen comportamiento” son **continuas** en c.

Es decir, cuando esto ocurre para calcular el límite bastará con sustituir el valor al que tiende x directamente en la expresión de la función (esto sucede porque trabajamos normalmente con funciones continuas).

Límites básicos

Si b y c son números reales y n un número entero positivo, tenemos:

1. $\lim\limits_{x\to c} b=b$ 2. $\lim\limits_{x\to c} x=c$ 3. $\lim\limits_{x\to c} x^n=c^n$
4. $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{c}$; $\forall\, c$ si n es impar, y $\forall\, c>0$ si n es par

Propiedades de los límites

Si b y c son números reales y n un número entero positivo, y además f y g son funciones que tienen los siguientes límites:

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=A$; $\lim\limits_{x\to c} g(x)=B$, entonces

1. $\lim\limits_{x\to c}\left[b\cdot f(x)\right]=b\cdot\lim\limits_{x\to c} f(x)=b\cdot A$
2. $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to c} f(x)\pm\lim\limits_{x\to c} g(x)=A\pm B$
3. $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to c} g(x)=A\cdot B$
4. $\lim\limits_{x\to c}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}=\dfrac{A}{B}$; $B\neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n=A^n$
6. Si $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe (o es $+\infty$) entonces
   $\lim\limits_{x\to c}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right]=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}=\sqrt[n]{A}$
   válido siempre que la raíz exista

Tabla de operaciones con infinito (1)

Sumas, Restas	Productos	Cocientes		Potencias
$\infty+\infty=\infty$	$\infty\cdot\infty=\infty$	$\dfrac{0}{a}=0$	$\dfrac{\infty}{a}=\infty$	$a^{\infty}=\begin{cases}\infty & a>1\\ 0 & 0<a<1\end{cases}$
$\infty\pm a=\infty$	$\infty\cdot a=\infty$	$\dfrac{0}{\infty}=0$	$\dfrac{\infty}{0}=\infty$	$\infty^{a}=\begin{cases}\infty & a>0\\ 0 & a<0\end{cases}$
$-\infty-\infty=-\infty$	regla de signos	$\dfrac{a}{\infty}=0$	$\dfrac{a}{0^{\pm}}=\pm\infty$	$a^{-\infty}=\begin{cases}0 & a>1\\ \infty & 0<a<1\end{cases}$
$-\infty\pm a=-\infty$	$[0\cdot\infty]$ IND.	$\left[\dfrac{0}{0}\right]$ IND.	$\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ IND.	$(-\infty)^{a}=\begin{cases}\pm\infty & a>0\\ 0 & a<0\end{cases}$
$[\infty-\infty]$ IND.				$[1^{\infty}]$ IND. ; $[0^{0}]$ IND. ; $[\infty^{0}]$ IND.

(1) Estas expresiones se admiten así como una forma de abreviar la escritura, y solo tienen sentido en relación con el concepto de límite.

Límites en el infinito

Para expresar que damos a x valores cada vez

— más grandes escribimos $x \to +\infty$ (x tiende a más infinito)

— más pequeños escribimos $x \to -\infty$ (x tiende a menos infinito)

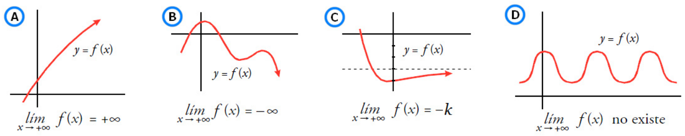
Y el límite nos indica lo que le ocurre a la función en cada caso:

a) La función no está acotada y sus valores son cada vez más grandes $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

b) La función no está acotada y sus valores son cada vez más pequeños $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$

c) La función está acotada y se acerca cada vez más a un valor k $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k$

d) Los valores de la función ni crecen ni decrecen indefinidamente, ni se acercan cada vez más a un número $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \;\to\;$ *no existe*



De forma análoga, pero en el lado izquierdo, cuando $x \to -\infty$

Observación: aunque para calcular límites en el infinito podamos recurrir a usar valores de x muy grandes (o muy pequeños) conviene no olvidar que infinito no es un número y no sigue las reglas que conocemos con los números, p.ej. $\infty + \infty = \infty$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $\infty^{\infty} = \infty$,...

Cálculo de Límites

En general, para calcular el límite de una función seguiremos este protocolo:

— Si la función se define mediante una única expresión, evaluamos la función en el punto c

— Si la función está definida "a trozos" evaluaremos la función en las expresiones que definen a $f(x)$ a izquierda y derecha de los extremos de los intervalos.

Como vimos anteriormente, no parece existir diferencia entre el cálculo del límite en un punto y evaluar la función en ese punto, sin olvidar que, para calcular un límite en un punto sólo nos interesa lo que le ocurre a la función muy cerca de él, no en dicho punto.

No obstante, lo cierto es que a la hora de calcular límites nos encontramos con casos en los que al evaluar la función:

— O el punto c no pertenece al domino de la función.

— O el punto c genera una indeterminación, es decir, no es posible a partir de ella saber el valor del límite.

Cuando estamos ante alguno de estos casos, el cálculo del límite deberá realizarse mediante procedimientos analíticos.

INDETERMINACIONES

Existen formas llamadas **indeterminaciones** porque no es posible a partir de ellas determinar el límite. Las formas indeterminadas no garantizan que un límite existe, ni indican lo que el límite es, si existe.

El resultado no es el mismo en todos los casos, es decir, su valor no sólo depende del límite de las funciones f y g , sino de las propias funciones. En el cálculo de límites tenemos estas 7 indeterminaciones:

$$\boxed{\infty - \infty \;\; ; \;\; 0\cdot\infty \;\; ; \;\; \frac{0}{0} \;\; ; \;\; \frac{\infty}{\infty} \;\; ; \;\; 0^0 \;\; ; \;\; \infty^0 \;\; ; \;\; 1^{\infty}}$$

Si al intentar evaluar un límite se llega a una de estas formas, y las funciones son sencillas y habituales, intentaremos reescribir la función mediante técnicas algebraicas.

Sin embargo, no todas las formas indeterminadas se pueden resolver así. Esto ocurre a menudo con funciones menos sencillas y cuando funciones algebraicas y transcendentes están mezcladas.

En estos casos, y según la indeterminación, podemos aplicar:

— La "**regla de L'Hôpital**", si es posible (una o más veces)

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

— Infinitésimos equivalentes:
Si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes cuando $x \to c$, entonces se puede decir que $f(x) \approx g(x)$ cuando $x \to c$. Es decir, cuando aparecen como factor o divisor pueden sustituirse uno por otro para el cálculo de límites cuando $x \to c$.

— La fórmula $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to c}\left[g(x)\cdot(f(x)-1)\right]}$

— Otras equivalencias de funciones, como:
$x \to \infty \;\;\Rightarrow\;\; a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \approx a_n x^n$

Un infinitésimo es una cantidad infinitamente pequeña, pudiéndose definir como: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$; f es un infinitésimo en $x = c$

$f(x)$ es un infinitésimo cuando $x \to 0$ en estos casos:

$\operatorname{sen} x \approx x$; $\operatorname{tg} x \approx x$; $1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$; $e^x - 1 \approx x$; $\ln(1+x) \approx x$, *etc.*

También es útil saber que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Límites de funciones Polinómicas

Considerando la función polinómica $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Caso I, cuando x tiende a un punto: $\lim\limits_{x\to c} P(x)$; siendo c un nº real

$\lim\limits_{x\to c} P(x) = P(a)$, es decir, sustituyendo x por c

Esto se deduce de los límites básicos ya citados.

Caso II, cuando x tiende a infinito: $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)$

El limite cuando $x \to +\infty$ de una función polinómica es $\pm\infty$, según el coeficiente del **término de mayor grado**. Si $x \to -\infty$, además tendremos en cuenta el exponente del término de mayor grado.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n = \pm\infty$$

Es decir, el signo del ∞ se determina con la "**regla de los signos**"

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 2}(5x-1) = 5\cdot 2 - 1 = \boxed{9}$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to -1}\left(8x^3 + 11x^2 - 32x - 10\right) = 8(-1)^3 + 11(-1)^2 - 32(-1) - 10 = \boxed{25}$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3 - x^4\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-x^4\right) = \boxed{-\infty}$$

(El término x^4 es un infinito de orden superior)

Ejemplo 4

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3 - 10x^2 - 9x - 100\right) = \lim_{x\to\infty} x^3 = \boxed{\infty}$$

Límites de funciones Racionales

Siendo la función racional $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, (cociente de dos polinomios)

Caso I, cuando x tiende a un punto: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$; siendo c un nº real

La forma de hallar el límite depende del valor de $Q(c)$

1º Si $Q(c)\neq 0$ entonces $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(c)}{Q(c)}$

2º Si $Q(c)=0$ puede ocurrir:

a) Que $P(c)\neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\infty$

Y entonces estudiamos los límites laterales.

b) Que $P(c)=0$, entonces nos aparece $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ (IND.)

Para evitar la indeterminación podemos utilizar:
"Regla de Ruffini". La fracción se puede simplificar dividiendo numerador y denominador por $(x-c)$ una o varias veces hasta poder aplicar el apartado 1º o el 2º a).
"Multiplicar por el conjugado". Es útil cuando aparecen raíces cuadradas en numerador y/o denominador.

Caso II, cuando x tiende a infinito: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Al evaluar estos límites (aplicando las propiedades de los límites) obtenemos la indeterminación $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

1º Método:
La forma más rápida de hallar el límite es teniendo en cuenta que solo importarán los términos de mayor grado del numerador y del denominador:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^m+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^n+\ldots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^m+\ldots}{b_mx^n+\ldots}$$

Para hallar límites en el infinito de funciones racionales de este tipo nos fijaremos en el grado del numerador (m) y en el grado del denominador (n), pudiendo aplicar la siguiente regla:

- Si $m>n$ entonces $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ (usar regla de los signos)
- Si $m<n$ entonces $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$
- Si $m=n$ entonces $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\dfrac{a}{b}$ (aplicar regla de los signos)

2º Método:
El problema también se puede resolver reescribiendo la expresión dada en otra forma equivalente; concretamente dividiendo cada uno de los términos de la fracción por la potencia de mayor grado que aparezca en toda la expresión, simplificando y, sabiendo que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0 \quad \text{(Si } n \text{ es positivo y } k \text{ constante.)}$$

Pues al dividir un número cualquiera por un número cada vez más grande, el cociente es cada vez más próximo a cero. Observa que ahora el que sea $+\infty$ o $-\infty$ es indiferente pues el resultado es 0.

Cuando se trate de cocientes de otros tipos de funciones no polinómicas se utilizan otros métodos, ya mencionados anteriormente.

Observación: si aparece la indeterminación $[\infty-\infty]$ o $[0\cdot\infty]$, por tratarse de fracciones algebraicas, a veces podemos evitar estas indeterminaciones efectuando la resta o el producto de dichas fracciones.

Ejemplo 5

$$\lim_{x\to1}\frac{2x-5}{x+7}=\frac{2\cdot1-5}{1+7}=\boxed{-\frac{3}{8}} \quad (\text{por sustitución directa})$$

Ejemplo 6

$$\lim_{x\to5}\frac{-3}{(x-5)^2}=\frac{-3}{0^+}=\boxed{-\infty}$$

Como el denominador está al cuadrado no es necesario calcular los límites laterales.

Ejemplo 7

$$\lim_{x\to0}\frac{x^4-x^3}{3x^4-2x^3}=\frac{0-0}{0-0}=\underset{IND.}{\left[\frac{0}{0}\right]} \quad \text{(sacando factor común)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^3}(x-1)}{\cancel{x^3}(3x-2)}=\lim_{x\to0}\frac{x-1}{3x-2}=\frac{0-1}{0-2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 8

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\frac{1-3+2}{1-1}=\underset{IND.}{\left[\frac{0}{0}\right]} \quad \text{(descomponiendo en factores)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x+1}=\frac{1-2}{1+1}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 9

1º Método: (comparando el grado del N y del D)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{x^2+2}=\underset{IND.}{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}\underbrace{\to}_{gr(N)>gr(D)}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\boxed{\infty}$$

2º Método: (dividiendo por potencia de mayor grado de la expresión)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{x^2+2}=\underset{IND.}{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}\to\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{1+0}{0+0}=\frac{1}{0}=\boxed{\infty}$$

Ejemplo 10

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x}{x^3-3x}=\underset{IND.}{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}\underbrace{\to}_{gr(N)<gr(D)}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\boxed{0}$$

Ejemplo 11

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x-1}{2x^3+2}=\underset{IND.}{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}\underbrace{\to}_{gr(N)=gr(D)}\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{2x^3}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

Ejemplo 12

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-5x}{x^2-3x}=\underset{IND.}{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}\underbrace{\to}_{gr(N)>gr(D)}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=\boxed{-\infty}$$

Ejemplo 13

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-x}+x}=\underset{IND.}{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}$$

Al dividir por *x*, dentro de la raíz pasa como x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1-0}+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Límites de funciones Irracionales

Entendemos por expresiones irracionales todas las que resultan de efectuar composiciones, sumas, productos, etc., entre funciones polinómicas o racionales, y funciones del tipo $\sqrt[n]{x}$, a condición de que la variable x aparezca necesariamente en el radicando de alguna raíz.

Para calcular límites de éstas funciones utilizamos las propiedades:

- Si $\sqrt[n]{c}$ existe en $\mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$
- Si $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe (o es $+\infty$), entonces
$$\lim_{x\to c}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)} = \sqrt[n]{A} \quad \text{(siempre que la raíz exista)}$$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \quad \left(\sqrt{+\infty} = +\infty\right)$

(Que son válidas cuando $x \to c$, y cuando $x \to \pm\infty$)

Habitualmente, en funciones irracionales, podemos encontrar indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ que logramos resolver, si no vemos un camino más fácil, multiplicando por la expresión conjugada, y simplificando.

Ejemplo 14

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+6x+9} = \sqrt{\lim_{x\to 4}\left(x^2+6x+9\right)} = \sqrt{4^2+6\cdot 4+9} = \sqrt{49} = \boxed{7}$$

(Por sustitución directa y aplicando propiedades)

Ejemplo 15

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3}-x^2\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-x^2\right) = \boxed{-\infty} \quad \text{(por jerarquía de infinitos)}$$

(El término x^2 es un infinito de orden superior a $x^{\frac{3}{2}}$)

Ejemplo 16

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-x\right) = \underset{IND.}{\left[\infty-\infty\right]} \quad \text{(multiplicando por conjugado)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-5}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-5}+x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5-x^2}{\sqrt{x^2-5}+x} = \frac{-5}{\infty} = \boxed{0}$$

Ejemplo 17

$$\lim_{x\to 5}\sqrt[3]{x^2+2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 5}\left(x^2+2\right)} = \sqrt[3]{27} = \boxed{3} \quad \text{(por sustitución directa)}$$

Ejemplo 18

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{3-3}{\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \underset{IND.}{\left[\frac{0}{0}\right]} \quad \text{(multiplicando por conjugado)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{\cancel{(x-3)}}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}+\sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

Ejemplo 19

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{2x} = \underset{IND.}{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} \to \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}}{\frac{2x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{2} = \frac{\sqrt{1+0}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 20

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^4+10}}{2x^2-7} = \underset{IND.}{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}$$

Al dividir por x^2, dentro de la raíz pasa como x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{9x^4}{x^4}+\frac{10}{x^4}}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{7}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{10}{x^4}}}{2-\frac{7}{x^2}} = \frac{\sqrt{9+0}}{2-0} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Límites de funciones definidas "a trozos"

Sea $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & si\ x < c \\ f_2(x) & si\ x \geq c \end{cases}$;

Además f_1 y f_2 son funciones continuas en c

CÁLCULO DEL LÍMITE DE $f(x)$ EN EL PUNTO DE RUPTURA

Se calculan los límites laterales en dicho punto.
Como f_1 y f_2 son continuas,

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c} f_1(x) = f_1(c) \ ; \ \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c} f_2(x) = f_2(c)$$

- Si $f_1(c) = f_2(c) = L$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$
- Si $f_1(c) \neq f_2(c)$, entonces el límite no existe

CÁLCULO DEL LÍMITE DE $f(x)$ EN OTRO PUNTO CUALQUIERA DEL DOMINIO

$$\text{Si } a < c \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) = f_1(a)$$

$$\text{Si } a > c \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = f_2(a)$$

Ejemplo 21

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si\ x < 0 \\ x+1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Para calcular el límite de la función en el punto de ruptura **calculamos** los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+1\right) = 0^2+1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x+1\right) = 0+1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{1}$$

Ejemplo 22

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5 & si\ x < 3 \\ -x+2 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

Para calcular el límite de la función en el punto de ruptura **calculamos** los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\left(2x-5\right) = 2\cdot 3-5 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\left(-x+2\right) = -3+2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{no coinciden, por tanto} \\ \textit{No existe límite} \end{array}$$

Consecuentemente, $f(x)$ no es continua en $x = 3$

Criterio de "Jerarquía de infinitos"

En general, podemos comparar infinitos, estableciendo el siguiente orden, de las más rápidas a las más lentas acercándose a infinito:

Exponenciales a^x , $a>1$	Potenciales x^m ; $\sqrt[n]{x^m}$	Logarítmicas $\log_a x$, $a>1$
Dadas dos funciones exponenciales, la de mayor base es un infinito de orden superior.	Si tenemos dos potencias de *x*, la de mayor exponente es un infinito de orden superior.	Dadas dos funciones logarítmicas, la de menor base es un infinito de orden superior.

Es decir, una función exponencial (de base mayor que 1) es un infinito de orden superior a una potencia de x ; y las potencias de x son infinitos de orden superior a las funciones logarítmicas.
Dos polinomios del mismo grado o dos exponenciales de la misma base son infinitos del mismo orden.

Ejemplos utilizando el criterio de jerarquía

10^x	e^x	2^x	x^2	x	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\ln x$	$\log x$

orden mayor → *orden menor*

Ejemplo 23

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-\sqrt{x}+6}{2\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}\xrightarrow[\text{jerarquía}]{\text{criterio}}\lim_{x\to\infty}\frac{-\sqrt{x}+6}{2\ln x}=\boxed{-\infty}$$

Ejemplo 24

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^{15}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}=\boxed{\infty}$$ (El numerador es de orden superior)

Ejemplo 25

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^7-10}}{x^3-7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}=\boxed{\infty}$$ (Numerador de orden superior: $x^{\frac{7}{2}}>x^3$)

Ejemplo 26

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^5-10}}{x^3-7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}=\boxed{0}$$ (Denominador de orden superior: $x^3>x^{\frac{5}{2}}$)

Ejemplo 27

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(x^{45}+1000\right)}{x^2-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}=\boxed{0}$$ (El denominador es de orden superior)

Ejemplo 28

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^{1000}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}=\boxed{\infty}$$ (El numerador es de orden superior)

Ejemplo 29

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\log\left(x^{100}+1\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}=\boxed{\infty}$$ (El numerador es de orden superior)

Límites laterales, *ejemplos*

Se utilizan habitualmente en funciones con asíntotas verticales y en funciones definidas "a trozos" en sus puntos extremos.

Ejemplo 30

$$\lim_{x\to-5}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=\frac{(-5)^3}{(-5)^2+2\cdot(-5)-15}=\left[\frac{-125}{0}\right]\to \textit{Lím. laterales}$$

Al quedar un número partido por cero, calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to-5^-}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=\frac{-125}{0^+}=\boxed{-\infty}\quad;\quad\lim_{x\to-5^+}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=\frac{-125}{0^-}=\boxed{+\infty}$$

Observamos que los límites laterales son distintos.

(Podemos probar con -5.01 para $x<-5$ y con -4.99 para $x>-5$)
Calcular el límite lateral no consiste más que en averiguar el signo del denominador cerca del valor del que tomamos el límite, pues el del numerador ya lo conocemos.

Ejemplo 31

$$\lim_{x\to-2}\frac{1-x}{x^2+2x}=\frac{1-(-2)}{(-2)^2+2(-2)}=\frac{3}{4-4}=\left[\frac{3}{0}\right]\to \textit{Lím. laterales}$$

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{1-x}{x(x+2)}=\frac{3}{0^+}=\boxed{+\infty}\quad;\quad\lim_{x\to-2^+}\frac{1-x}{x(x+2)}=\frac{2}{0^-}=\boxed{-\infty}$$

Observamos que los límites laterales son distintos.

Ejemplo 32

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2}{x^2+x}=\frac{(-1)^2}{(-1)^2+(-1)}=\left[\frac{1}{0}\right]\to \textit{Lím. laterales}$$

Como queda un número partido por cero, calculamos límites laterales

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2}{x^2+x}=\frac{1}{0^+}=\boxed{+\infty}\quad;\quad\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2}{x^2+x}=\frac{1}{0^-}=\boxed{-\infty}$$

Observamos que los límites laterales son distintos

(Probamos con -1.01 para $x<-1$ y con -0.99 para $x>-1$)

Ejemplo 33

$$\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{2-x}}{x}=\left[\frac{2-\sqrt{2}}{0}\right]\to \textit{Lím. laterales}$$

Al quedar un número partido por cero, calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to0^-}\frac{2-\sqrt{2-x}}{x}=\frac{2-\sqrt{2}}{0^-}=\boxed{-\infty}\quad;\quad\lim_{x\to0^+}\frac{2-\sqrt{2-x}}{x}=\frac{2-\sqrt{2}}{0^+}=\boxed{+\infty}$$

Observamos que los límites laterales son distintos.

Ejemplo 34

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+1}{x^2-1}=\frac{1+1}{1-1}=\left[\frac{2}{0}\right]\to \textit{Lím. laterales}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^3+1}{x^2-1}=\frac{2}{0^-}=\boxed{-\infty}\quad;\quad\lim_{x\to1^+}\frac{x^3+1}{x^2-1}=\frac{2}{0^+}=\boxed{+\infty}$$

Observamos que los límites laterales son distintos.

Ejemplo 35

$$\lim_{x\to3}\frac{2}{x^2-2x-3}=\frac{2}{3^2-2\cdot3-3}=\frac{2}{9-9}=\left[\frac{2}{0}\right]\to \textit{Lím. laterales}$$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{2}{x^2-2x-3}=\frac{2}{0^-}=\boxed{-\infty}\quad;\quad\lim_{x\to3^+}\frac{2}{x^2-2x-3}=\frac{2}{0^+}=\boxed{+\infty}$$

Observamos que los límites laterales son distintos.

Ejemplos de Resolución de Indeterminaciones

Indeterminaciones tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$

Métodos generales

a) Si se trata de funciones racionales descomponemos numerador y denominador en factores (Ruffini, igualdades notables, etc.) y simplificamos.
b) Si son funciones irracionales, cuando aparecen raíces cuadradas en el numerador (o en el denominador), multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada (del numerador o del denominador). Después factorizamos y simplificamos. Si aparecen varias raíces de distinto índice las pasamos a índice común y simplificamos.
c) Si los métodos anteriores no funcionan, o nos resulta más cómodo, aplicamos la regla de L´Hôpital (derivando).

Ejemplo 36

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{\sqrt{1-0}-\sqrt{1+0}}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]_{IND.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x-1-x}{x\cdot\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=\frac{-2}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}}=\frac{-2}{2}=\boxed{-1}$$

Ejemplo 37

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2}=\left[\frac{0}{0}\right]_{IND.}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{x-2}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{2+2}+2}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

Ejemplo 38

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\frac{3^3-9}{3^2-2\cdot 3-3}=\left[\frac{0}{0}\right]_{IND.}$$

Aplicamos "igualdades notables" para factorizar y simplificar
Sabemos, por teoría, que un factor es $(x-3)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\,\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\,(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{3+3}{3+1}=\frac{6}{4}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

Ejemplo 39

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x-4}=\frac{4^2-8\cdot 4+16}{4-4}=\left[\frac{0}{0}\right]_{IND.}$$

Aplicamos "igualdades notables" para factorizar y simplificar

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-4)}}=\lim_{x\to 4}(x-4)=4-4=\boxed{0}$$

Ejemplo 40

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5+x-2}{2x^3-x-1}=\frac{1^5+1-2}{2\cdot 1^3-1-1}=\left[\frac{0}{0}\right]_{IND.}$$

Aplicamos "Regla de Ruffini" para factorizar y simplificar
Sabemos, por teoría, que un factor es $(x-1)$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2\\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & +2\\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & \lfloor 0\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -1 & -1\\ 1 & & 2 & 2 & +1\\ \hline & 2 & 2 & 1 & \lfloor 0\end{array}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^4+x^3+x^2+x+2\right)}{\cancel{(x-1)}\left(2x^2+2x+1\right)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3+x^2+x+2}{2x^2+2x+1}=\frac{1^4+1^3+1^2+1+2}{2\cdot 1^2+2\cdot 1+1}=\boxed{\frac{6}{5}}$$

Ejemplo 41

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{x}=\frac{2\cdot 0^2+3\cdot 0}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]_{IND.}$$

Aplicamos "Sacar factor común" para simplificar

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\,(2x+3)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}(2x+3)=2\cdot 0+3=\boxed{3}$$

Ejemplo 42

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x+3}{x^2-x-2}=\frac{3\cdot(-1)+3}{(-1)^2-(-1)-2}=\frac{3-3}{1+1-2}=\left[\frac{0}{0}\right]_{IND.}$$

Aplicamos "Sacar factor común y binomio" para simplificar
Sabemos, por teoría, que un factor es $(x+1)$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}\,(x-2)}=\lim_{x\to -1}\frac{3}{x-2}=\frac{3}{-1-2}=\boxed{-1}$$

Ejemplo 43

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{2-2}{\sqrt{2+7}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]_{IND.}$$

"Multiplicamos por el conjugado" del denominador

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\cancel{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x+7}+3\right)=\sqrt{2+7}+3=\boxed{6}$$

Ejemplo 44

$$\lim_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}=\frac{1-\sqrt{4-3}}{4^2-16}=\frac{1-1}{16-16}=\left[\frac{0}{0}\right]_{IND.}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(1-\sqrt{x-3}\right)}{\left(x^2-16\right)}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{x-3}\right)}{\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{1-x+3}{(x+4)(x-4)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}$$

$$\lim_{x\to 4}=\frac{-1\cdot\cancel{(x-4)}}{(x+4)\,\cancel{(x-4)}\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{-1}{8\cdot 2}=\boxed{-\frac{1}{16}}$$

Ejemplo 45

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4}=\frac{1-4+3}{1-5+4}=\left[\frac{0}{0}\right]_{IND.}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\,(x-3)}{\cancel{(x-1)}\,(x-4)}=\lim_{x\to1}\frac{x-3}{x-4}=\frac{1-3}{1-4}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

Ejemplo 46

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^2-4x}{x^3+3x}=\frac{0-0}{0+0}=\left[\frac{0}{0}\right]_{IND.}\quad \text{(sacando factor común)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}\,(2x-4)}{\cancel{x}\,(x^2+3)}=\lim_{x\to0}\frac{2x-4}{x^2+3}=\frac{0-4}{0+3}=\boxed{-\frac{4}{3}}$$

Indeterminaciones $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Ejemplo 47

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-6x}-x}{x-\sqrt{x^2+4x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}\quad \text{(multiplicar por conjugado 2 veces)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-6x}-x}{x-\sqrt{x^2+4x}}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-6x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-6x}+x\right)}\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\cancel{x^2}-6x-\cancel{x^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)}{\left(\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-4x\right)\left(\sqrt{x^2-6x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6\cancel{x}\left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)}{-4\cancel{x}\left(\sqrt{x^2-6x}+x\right)}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{\sqrt{x^2-6x}+x}\right]=\frac{3}{2}\cdot\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{6x}{x^2}}+\frac{x}{x}}\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{x}}}{\sqrt{1-\frac{6}{x}}+1}\right]=\frac{3}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{1+0}}{\sqrt{1-0}+1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

Ejemplo 48

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}$$

Al dividir numerador y denominador por x, dentro de la raíz pasa como x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1}=\frac{\sqrt{1}}{1}=\boxed{1}$$

Ejemplo 49

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x-3}{3x^4+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}=\lim_{x\to\infty}\frac{7\cancel{x^4}}{3\cancel{x^4}}=\boxed{\frac{7}{3}}$$

Ejemplo 50

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-3x^2-1}{2x^3+x^2-6x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}}=\boxed{2}$$

Ejemplo 51

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{0+0}{3+0}=\frac{0}{3}=\boxed{0}$$

Indeterminaciones $\left[\infty-\infty\right]$

Ejemplo 52

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-9}-\sqrt{x^2-6x+8}\right)=\left[\infty-\infty\right]_{IND.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-9}-\sqrt{x^2-6x+8}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+5x-9}+\sqrt{x^2-6x+8}\right)}{\left(\sqrt{x^2+5x-9}+\sqrt{x^2-6x+8}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-9-x^2+6x-8}{\sqrt{x^2+5x-9}+\sqrt{x^2-6x+8}}=\lim_{x\to\infty}\frac{11x-17}{\sqrt{\ldots}+\sqrt{\ldots}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}$$

Dividiendo cada término por la x de mayor grado (observa que dentro de la raíz debemos poner x^2). Es lo mismo que sacar factor común la x de mayor grado y simplificar.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11x}{x}-\frac{17}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{9}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{6x}{x^2}+\frac{8}{x^2}}}$$

Y recordando que $\frac{k}{\infty}=0$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11-\frac{17}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{9}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}}=\frac{11-0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0+0}}=\boxed{\frac{11}{2}}$$

Ejemplo 53

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=\left[\infty-\infty\right]_{IND.}\quad \text{(multiplicando por conjugado)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\cancel{x^2}-x\right)-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-x}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]_{IND.}$$

Dividiendo cada término por la x de mayor grado (observa que dentro de la raíz debemos poner x^2).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=\frac{-1}{\sqrt{1-0}+1}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 54

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}-\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1}=\left[\infty-\infty\right]_{IND.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x+1)-x^2(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\boxed{2}$$

Ejemplo 55

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3}\right)=\left[\infty-\infty\right]_{IND.}\quad \text{(multiplicando por conjugado)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3}\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3-x^2+3}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3}}=\frac{6}{\infty+\infty}=\boxed{0}$$